Sveučilište u Rijeci
University of Rijeka
http://www.uniri.hr

Polytechnica: Journal of Technology Education, Volume 7, Number 2 (2023)
Politehnika: Časopis za tehnički odgoj i obrazovanje, Svezak 7, Broj 2 (2023)

Politehnika
Polytechnica
https://politehnika.uniri.hr
cte@uniri.hr

DOI: https://doi.org/10.36978/cte.7.2.9

Stručni članak
Professional paper
UDK: 519.6

Analiza izvijanja konstrukcije pješačkog mosta metodom konačnih elemenata

Igor Pešić, Nives Ban
Studij Politehnike
Sveučilište u Rijeci
Sveučilišna avenija 4, Rijeka
Igor.pesic@uniri.hr, nban@student.uniri.hr

Sažetak

U ovom radu provedena je analiza izvijanja konstrukcije pješačkog mosta primjenom metode konačnih elemenata. Formulacija uzima u obzir utjecaj velikih pomaka na konstrukciju pod utjecajem konzervativnih i statičkih vanjskih opterećenja. Materijal se pretpostavlja linearno elastičnim i izotropnim. Stabilnost analize provodi se na temelju vlastitih vrijednosti (eigenvalue). Linearizirane ravnotežne jednadžbe grednog konačnog elementa izvedene su primjenom principa virtualnih radova i nelinearnog polja pomaka poprečnog presjeka.

Ključne riječi: *greda; stabilnost; izvijanje; metoda konačnih elemenata.*

1 Uvod

U ovom radu provedena je analiza izvijanja konstrukcije pješačkoga mosta. Tankostjene gredne konstrukcije su podesne za izradu pješačkih mostova jer nude veliku krutost i otpornost na opterećenja, ali su istovremeno i relativno lagane i estetski privlačne. Međutim, zbog velike vitkosti pojedinih elemenata, ovakve konstrukcije su podložne gubitku stabilnosti što može ugroziti sigurnost korisnika mosta. Zato je iznimno važno imati sposobnost preciznog određivanja graničnih stanja stabilnosti deformacijskih formi. Budući da analitička rješenja za probleme stabilnosti tankostjenih konstrukcija mogu biti dobivena samo u relativno jednostavnijim slučajevima, pri analizi takvih problema nužno je koristiti neku od numeričkih metoda. Jedna od takvih metoda je metoda konačnih elemenata.

Analiza stabilnosti može biti linearizirana u smislu brze provjere kritičnog opterećenja i pripadajućeg deformacijskog moda konstrukcije (Pešić, Turkalj, 2007), a isto tako i nelinearna kada prati kompletni odziv deformacije s obzirom na opterećenje (Pešić, Lanc, Turkalj, 2015).

Nelinearna analiza može koristiti Updated Lagrangian formulaciju (Lanc, Turkalj, Pešić, 2014; Turkalj i sur 2015) ili korotacijski opis (Lanc, Turkalj, Pešić, 2012; Lanc, Pešić, Turkalj, 2015; Pešić, Lanc, Turkalj, 2016; Pešić, Turkalj, 2023)

U ovom radu problem stabilnosti tretiran je kao problem vlastitih vrijednosti pa se kao rezultat dobivaju vlastite vrijednosti koje imaju značenje kritičnog opterećenja gubitka stabilnosti te pripadni vlastiti vektor koji predstavlja formu gubitka stabilnosti. Materijal je pretpostavljen kao izotropan i linearno-elastičan.

Tema ovog rada je primjenjiva na stručnim i sveučilišnim prijediplomskim studijima. Rad ukazuje na važnost proračuna stabilnosti konstrukcija koje trebaju biti dodatak statičkim i dinamičkim proračunima konstrukcija koje sadrže elemente kojima su poprečne dimenzije relativno male u odnosu na duljinu.

2 Kinematika grede

Promatrana je inicijalno ravna greda s nedeformabilnim poprečnim presjekom. Odabran je desni Kartezijev koordinatni sustav (z, x, y) tako da se z-os poklapa s aksijalnom osi grede i prolazi težištem O svakog poprečnog presjeka, a x- i y-osi su glavne osi inercije poprečnog presjeka. Komponente pomaka poprečnog presjeka se definiraju kao:

$$w_\mathrm{o} = w_\mathrm{o}(z),\ u_\mathrm{o} = u_\mathrm{o}(z),\ v_\mathrm{o} = v_\mathrm{o}(z),\ \varphi_\mathrm{z} = \varphi_\mathrm{z}(z), \\ \varphi_\mathrm{x} = -\frac{\mathrm{d}v_\mathrm{o}}{\mathrm{d}z} = \varphi_\mathrm{x}(z),\ \varphi_\mathrm{y} = \frac{\mathrm{d}u_\mathrm{o}}{\mathrm{d}z} = \varphi_\mathrm{y}(z), \tag{1}$$

gdje su: w_o, u_o i v_o pomaci težišta poprečnog presjeka u z-, x- i y- smjeru, odnosno; φ_z, φ_x i φ_y su kutovi zakreta poprečnog presjeka oko z-, x- i y-osi.
Neka $\mathbf{r}_0$ označava vektor položaja materijalne točke u referentnoj konfiguraciji, a $\mathbf{U}_\mathrm{o}$ vektor pomaka težišta.

Ako se pretpostave male rotacije, onda se može vektor pomaka $\mathbf{U}_\mathrm{ldf}$ koji predstavlja polje pomaka poprečnog presjeka izraziti kao:

$$\mathbf{U}_\mathrm{ldf} = \mathbf{U}_\mathrm{o} + \tilde{\boldsymbol{\varphi}}\ \mathbf{r}_0, \tag{2}$$

gdje su:

$$\mathbf{U}_\mathrm{ldf} = \begin{Bmatrix} w \\ u \\ v \end{Bmatrix},\ \mathbf{U}_\mathrm{o} = \begin{Bmatrix} w_\mathrm{o} \\ u_\mathrm{o} \\ v_\mathrm{o} \end{Bmatrix},\ \mathbf{r}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ x \\ y \end{Bmatrix},\ \tilde{\boldsymbol{\varphi}} = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_\mathrm{y} & \varphi_\mathrm{x} \\ \varphi_\mathrm{y} & 0 & -\varphi_\mathrm{z} \\ -\varphi_\mathrm{x} & \varphi_\mathrm{z} & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

U jednadžbama (2) i (3) w, u i v su linearni izrazi ili izrazi prvog reda za pomake proizvoljne točke na poprečnom presjeku koja je definirana položajem koordinata x i y. Ako se ne mogu pretpostaviti male rotacije, tada se u analizu mora uvesti nelinearnopolje pomaka $\mathbf{U}_\mathrm{ndf}$:

$$\mathbf{U}_\mathrm{ndf} = \mathbf{U}_\mathrm{ldf} + \tilde{\mathbf{U}},\ \tilde{\mathbf{U}} = \{\tilde{w}\quad \tilde{u}\quad \tilde{v}\}^\mathrm{T} = 0.5\ \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2\ \ \mathbf{r}_0 \tag{4}$$

gdje izraz $\tilde{\mathbf{U}}$ sadrži nelinearne izraze ili izraze drugog reda za pomake koji su rezultat velikih rotacija u prostoru. Green-Lagrangeov tenzor deformacija se može napisati kao:

$$\varepsilon_\mathrm{ij} \cong e_\mathrm{ij} + \eta_\mathrm{ij} + \tilde{e}_\mathrm{ij}\ , \\ 2e_\mathrm{ij} = u_\mathrm{i,j} + u_\mathrm{j,i}\ ,\ 2\eta_\mathrm{ij} = u_\mathrm{k,i}\quad u_\mathrm{k,j}\ ,\ 2\tilde{e}_\mathrm{ij} = \tilde{u}_\mathrm{i,j} + \tilde{u}_\mathrm{j,i}\ , \tag{5}$$

gdje zadnji izraz za deformaciju predstavlja dodatni izraz zbog učinka velikih rotacija. Ovdje treba napomenuti da zbog geometrijske pretpostavke o nevitoperenju poprečnog presjeka, komponente deformacija $\varepsilon_{11} = \varepsilon_\mathrm{xx}$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_\mathrm{yy}$ i $2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_\mathrm{xy} = \gamma_\mathrm{xy}$ u jednadžbi (5) trebaju biti jednake nuli.

3 Rezultanta unutrašnjih sila

Pod pretpostavkom krutosti u ravnini deformacije ($\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$), a prema teorijama mehanike za savijanje i uvijanje, rezultante naprezanja se definiraju kao:

$$F_\mathrm{z} = \int_A \sigma_\mathrm{z}\mathrm{d}A,\ F_\mathrm{x} = \int_A \tau_\mathrm{zx}\mathrm{d}A\ ,\ F_\mathrm{y} = \int_A \tau_\mathrm{zy}\mathrm{d}A,\ M_\mathrm{z} = \int_A \left(\tau_\mathrm{zy}x - \tau_\mathrm{zx}y\right)\mathrm{d}A, \\ M_\mathrm{x} = \int_A \sigma_\mathrm{z}y\,\mathrm{d}A\ ,\ M_\mathrm{y} = -\int_A \sigma_\mathrm{z}x\mathrm{d}A\ ,\ \bar{K} = \int_A \sigma_\mathrm{z}\left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}A, \tag{6}$$

gdje F_z predstavlja aksijalnu silu, F_x i F_y su poprečne sile, M_z je Saint-Venantov ili uniformni moment uvijanja, M_x i M_y su momenti savijanja oko x- i y- osi, a $\bar{K}$ je Wagnerov koeficijent (Chen, Atsuta, 1977). Pod pretpostavkom linearno elastičnog ponašanja, veze između komponenata naprezanja i deformacija se mogu izraziti kao:

$$\sigma_\mathrm{z} = Ee_{33} = Ee_\mathrm{zz},\quad \tau_\mathrm{zx} = 2Ge_{31} = Ge_\mathrm{zx},\quad \tau_\mathrm{zy} = 2Ge_{32} = Ge_\mathrm{zy} \tag{7}$$

gdje su E i G moduli elastičnosti i smicanja. Nakon uvrštavanja izraza (5) i (7) u izraz (6), veze između komponenata rezultante unutrašnjih sila i komponenata pomaka se mogu izraziti kao:

$$F_\mathrm{z} = EA\frac{\mathrm{d}w_\mathrm{o}}{\mathrm{d}z}\ ,\ F_\mathrm{x} = -\frac{\mathrm{d}M_\mathrm{y}}{\mathrm{d}z},\ F_\mathrm{y} = \frac{\mathrm{d}M_\mathrm{x}}{\mathrm{d}z},\ M_\mathrm{z} = GI_\mathrm{t}\frac{\mathrm{d}\varphi_\mathrm{z}}{\mathrm{d}z}\ , \\ M_\mathrm{x} = -EI_\mathrm{x}\frac{\mathrm{d}^2v_\mathrm{o}}{\mathrm{d}z^2}\ ,\ M_\mathrm{y} = EI_\mathrm{y}\frac{\mathrm{d}^2u_\mathrm{o}}{\mathrm{d}z^2}\ ,\ \bar{K} = F_\mathrm{z}\frac{I_P}{A}, \tag{8}$$

gdje je A površina poprečnog presjeka, I_P je polarni moment inercije poprečnog presjeka, a I_t torzijski moment inercije ili Saint-Venantova torzijska konstanta.

4 Ravnotežne jednadžbe

Ravnotežne jednadžbe deformiranog grednog elementa mogu se izvesti primjenom principa virtualnih radova:

$$\int_V {}^\mathrm{t}S_\mathrm{ij}\ \delta\,{}^\mathrm{t}\varepsilon_\mathrm{ij}\,\mathrm{d}V = \int_{A_\sigma} {}^\mathrm{t}t_\mathrm{i}\ \delta\left({}^\mathrm{t}u_\mathrm{i} + {}^\mathrm{t}\tilde{u}_\mathrm{i}\right)\mathrm{d}A_\sigma \tag{9}$$

gdje S_{ij} označava Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja druge vrste, ε_{ij} je Green-Lagrangeov tenzor deformacije iz izraza (5), t_i predstavlja površinske (kontaktne) sile, a u_i i $\tilde{u}_i$ su linearne i nelinearne komponente pomaka. Eksponent 't' uz veličine označava da se radi o njihovim totalnim ili ukupnim vrijednostima, a 'δ' označava virtualnu veličinu. Tenzor naprezanja i površinske sile se mogu rastaviti i linearizirati kao:

$$ {}^{t}S_{ij} = {}^{0}S_{ij} + S_{ij}, \quad {}^{t}t_i = {}^{0}t_i + t_i \tag{10}$$

pri čemu eksponent '0' znači da se radi o početnim ili inicijalnim vrijednostima, tj. vrijednostima prije pojave izvijanja. Uvrštavanjem izraza (5) i (10) u izraz (9) dobiva se:

$$ \int_V \left({}^{0}S_{ij}\,\delta e_{ij} + S_{ij}\,\delta e_{ij} + {}^{0}S_{ij}\,\delta\eta_{ij} + {}^{0}S_{ij}\,\delta\tilde{e}_{ij} \right) dV = \int_{A_\sigma} \left({}^{0}t_i\,\delta u_i + {}^{0}t_i\,\delta\tilde{u}_i + t_i\,\delta u_i \right) dA_\sigma \tag{11}$$

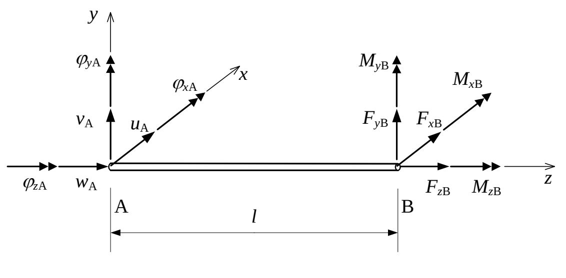
Ako su početne vanjske i unutrašnje sile u ravnoteži,

$$ \int_V {}^{0}S_{ij}\,\delta e_{ij}\,dV = \int_{A_\sigma} {}^{0}t_i\,\delta u_i\,dA_\sigma \tag{12}$$

jednadžba (11) se može napisati kao:

$$ \int_V S_{ij}\,\delta e_{ij}\,dV + \int_V {}^{0}S_{ij}\,\delta\eta_{ij}\,dV + \int_V {}^{0}S_{ij}\,\delta\tilde{e}_{ij}\,dV - \int_{A_\sigma} {}^{0}t_i\,\delta\tilde{u}_i\,dA_\sigma = \int_{A_\sigma} t_i\,\delta u_i\,dA_\sigma \tag{13}$$

Na Slici 1 je prikazan prostorni gredni konačni element s 12 stupnjeva slobode.



Slika 1. Prostorni gredni konačni element: čvorni pomaci i čvorne sile

Odgovarajući vektori čvornih pomaka i čvornih sila su:

$$ \left(\mathbf{u}^e\right)^T = \left\{ w_A, u_A, v_A, \varphi_{zA}, \varphi_{xA}, \varphi_{yA}, w_B, u_B, v_B, \varphi_{zB}, \varphi_{xB}, \varphi_{yB} \right\} \tag{14}$$

$$ \left(\mathbf{f}^e\right)^T = \left\{ F_{zA}, F_{xA}, F_{yA}, M_{zA}, M_{xA}, M_{yA}, F_{zB}, F_{xB}, F_{yB}, M_{zB}, M_{xB}, M_{yB} \right\} \tag{15}$$

gdje desni eksponent 'e' na oba vektora označava e-ti konačni element. Linearizirani princip virtualnih radova iz izraza (13) se može napisati kao:

$$ \delta U_E + \delta U_G = \delta W \tag{16}$$

gdje $\delta\mathbf{U}_E$ predstavlja virtualnu energiju elastičnih deformacija, $\delta\mathbf{U}_G$ predstavlja geometrijski potencijal, a $\delta\mathbf{W}$ označava virtualni rad.
Usvojivši linearnu interpolaciju za w_o i kubičnu interpolaciju za u_o, v_o i φ_z i povezujući rezultante naprezanja grede u polju s rezultantama u čvorovima elementa, mogu se izvesti slijedeći izrazi:

$$ \delta U_E = \left(\delta\mathbf{u}^e\right)^T \mathbf{k}_E^e\,\mathbf{u}^e, \quad \delta U_G = \left(\delta\mathbf{u}^e\right)^T \mathbf{k}_G^e\,\mathbf{u}^e, \quad \delta W = \left(\delta\mathbf{u}^e\right)^T \left(\mathbf{f}^e + \mathbf{f}_{ekv}^e\right) \tag{17}$$

gdje su $\mathbf{k}_E^e$ i $\mathbf{k}_G^e$ elastična i geometrijska matrica krutosti, odnosno na elementu prikazanom na slici 1, $\mathbf{f}^e$ je vektor čvornih sila koji sadrži čvorne sile nastale zbog djelovanja drugih elemenata strukture na gredni element, a $\mathbf{f}_{ekv}^e$ je ekvivalentni vektor opterećenja. Komponente matrica $\mathbf{k}_E^e$ i $\mathbf{k}_G^e$ mogu se naći u (Boresi, Chong, Saigal, 2002). Uvrštavanjem jednadžbi (17) u izraz (16), jednadžba ravnoteže grednog elementa se može napisati kao:

$$ \left(\mathbf{k}_E^e + \mathbf{k}_G^e\right)\mathbf{u}^e = \mathbf{f}^e + \mathbf{f}_{ekv}^e \tag{18}$$

Izraz (18) potrebno je transformirati u globalni koordinatni sustav primjenom standardnih transformacijskih procedura. Potom se sumiranjem jednadžbi svih konačnih elemenata dobiva jednadžba konstrukcije:

$$ \left(\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G\right)\mathbf{U} = \mathbf{P} \tag{19}$$

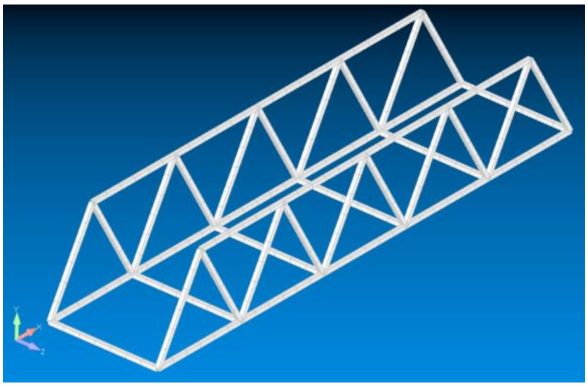
gdje su $\mathbf{K}_E$ i $\mathbf{K}_G$ elastična i geometrijska matrica krutosti konstrukcije, dok $\mathbf{U}$ i $\mathbf{P}$ predstavljaju vektore inkrementalnih čvornih pomaka i inkrementalnih čvornih opterećenja konstrukcije.
Linearna se analiza stabilnosti temelji na pretpostavci da se vanjsko opterećenje prilikom izvijanja ne mijenja, tj. $\mathbf{P} = \mathbf{0}$, te da je geometrijsku matricu $\mathbf{K}_G$ moguće linearizirati izlučivanjem parametra λ, tj. $\mathbf{K}_G = \lambda\hat{\mathbf{K}}_E$. Stoga je izraz (19) moguće napisati u slijedećem obliku:

$$ \left(\mathbf{K}_E + \lambda\,\hat{\mathbf{K}}_G\right)\mathbf{U} = \mathbf{0} \tag{20}$$

Izraz (20) predstavlja problem vlastitih vrijednosti gdje je λ vlastita vrijednost, odnosno parametar kritičnog opterećenja izvijanja, dok je $\mathbf{U}$ pripadni vlastiti vektor.

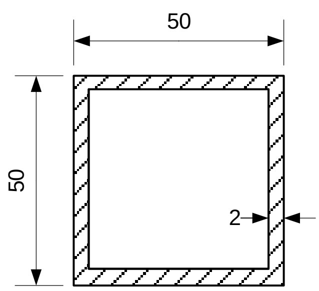
5 Primjer

Na Slici 2 je prikazana konstrukcija pješačkog mosta koja se sastoji od ukupno 44 štapova. Bočne stranice su izrađene od štapova duljine 1,3 m tako da međusobno formiraju jednakostranične trokute i povezane su pomoću šest štapova duljine 1,5 m. Ukupna duljina mosta je 6,5 m.



Slika 2. Rešetkasta konstrukcija pješačkog mosta

Poprečni presjek štapova je prikazan na Slici 3. Modul elastičnosti materijala iznosi E = 210 GPa, modul smicanja G = 80,77 GPa, a Poissonov koeficijent iznosi ν = 0,3.



Slika 3. Poprečni presjek kvadratne cijevi

Most je modeliran s 270 grednih konačniih elemenata (Slika 4). Konstrukcija je zglobno oslonjena na rubna četiri čvora i opterećena jednakim silama koje djeluju u negativnom smjeru osi Y u osam donjih čvorova prema slici.

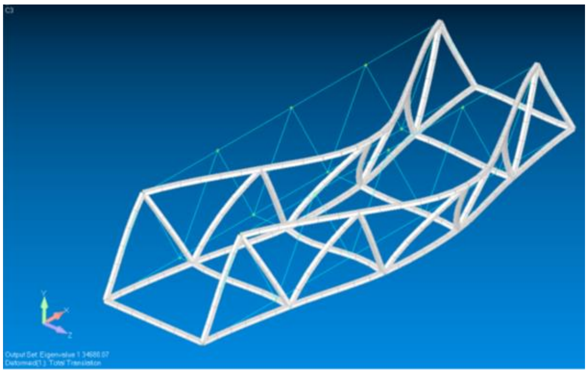
Slika 4. Mreža konačnih elemenata

Izvršena je linearizirana analiza koja kao rezultat daje vlastite vrijednosti kritičnog opterećenja pri kojem konstrukcija gubi stabilnost i pripadni vlastiti vektor koji ima značenje deformacijskog oblika izvijene konstrukcije. Kritične sile za pojedine vlastite vrijednosti dane su u Tablici 1.

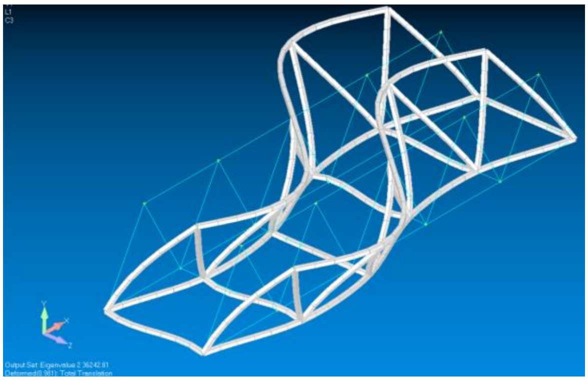
Vlastita vrijednost	Kritična sila (kN)
1	34,68
2	36,24
3	39,31
4	41,06

Tablica 1. Kritične sile

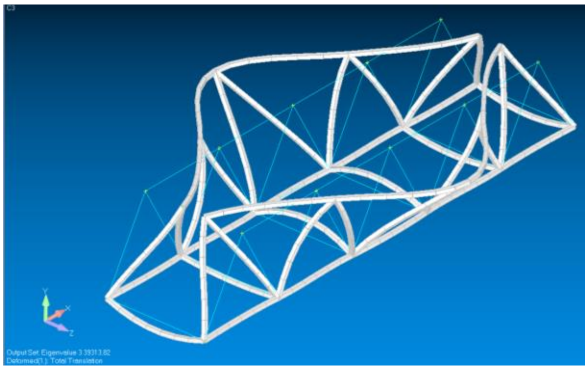
Deformacijski oblici izvijene konstrukcije prikazani su na Slikama 5-9.



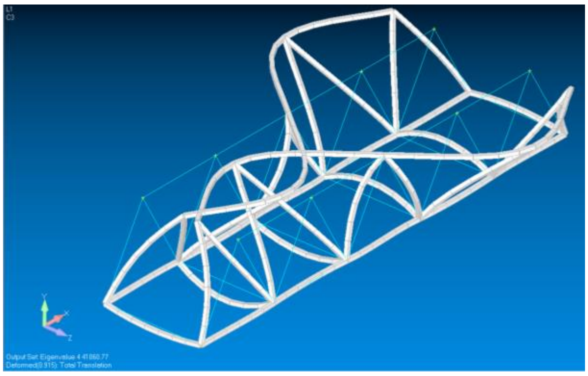
Slika 5. Vlastita vrijednost 1



Slika 6. Vlastita vrijednost 2



Slika 7. Vlastita vrijednost 3



Slika 8. Vlastita vrijednost 4

7 Zaključak

U ovom radu provedena je linearizirana analiza izvijanja konstrukcije pješačkoga mosta primjenom metode konačnih elemenata. Analiza je uzela u obzir utjecaj velikih pomaka na konstrukciju pod utjecajem konzervativnih i statičkih vanjskih opterećenja. Materijal je pretpostavljen kao linearno elastičan i izotropan. Rezultati analize su prikazani na primjeru konstrukcije sastavljene od 44 štapa. Izračunate su vrijednosti kritičnog opterećenja pri kojima konstrukcija gubi stabilnost

Ova analiza ima praktičnu primjenu u inženjerskom projektiranju pješačkih mostova. Ovaj model može biti koristan u razvoju algoritama za procjenu rizika od gubitka stabilnosti konstrukcije pješačkih mostova, što bi moglo značajno doprinijeti sigurnosti korisnika i smanjenju troškova održavanja mostova.

Literatura

Boresi, A.P., Chong, K.P., Saigal, S. (2002). *Approximate Solution Methods in Engineering Mechanics*. New York: John Wiley & Sons.

Chen W.F., Atsuta T. (1977). *Theory of Beam-columns (Vol. 2).* New York: McGraw-Hill.

Lanc, D., Pesic, I., Turkalj, G. (2012). Stability Analysis of Laminated Composite Thin-Walled Beam Structures. U B.H.V. Topping (ur.), *Proceedings of the Eleventh International Conference on Computational Structures Technology* (str. 224). Civil-Comp Press. doi: https://doi.org/10.4203/ccp.99.224

Lanc, D., Turkalj, G., Pesic, I. (2014). Global buckling analysis model for thin-walled composite laminated beam type structures. *Composite Structures, 111*, 371-380. doi: https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.01.020

Lanc, D., Turkalj, G., Pešić, I. (2015). Effect of shear flexibility in buckling analysis of beam structures. Machines, *Technologies, Materials, 7*, 58-61.

Pešić, I., Turkalj, G. (2007). Analiza izvijanja roštiljne konstrukcije metodom konačnih elemenata. *Engineering Review, 27*(1), 39-47.

Pešić, I., Lanc, D., Turkalj, G. (2015). Non-linear thermal buckling analysis of thin-walled beam structures. *Engineering Review, 35*(3), 239-245.

Pešić, I., Lanc, D., Turkalj, G. (2016). Non-linear global stability analysis of thin-walled laminated beam-type structures. *Computers & Structures, 173*, 19-30. doi: https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2016.05.015

Pešić, I., Turkalj, G. (2023). Large displacement analysis of laminated beam-type structures. *Engineering Review, 43*(2). doi: https://doi.org/10.30765/er.2184

Turkalj, G., Lanc, D., Brnic, J., Pešić, I. (2015). A beam formulation for large displacement analysis of composite frames with semi-rigid connections. *Composite Structures, 134*, 237-246. doi: https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.068

Buckling analysis of the construction of a pedestrian bridge using the finite element method

Abstract

In this paper, a buckling analysis of a pedestrian bridge structure was conducted using finite element methods. The formulation considers the effects of large displacements on the structure subjected to conservative and static external loads Material is assumed to be linear elastic and isotropic. Stability analysis is performed in eigenvalue manner. The linearized equilibrium equations are derived by applying the linearized virtual work principle and the non-linear cross-sectional displacement field.

Keywords: *beam; stability; buckling; finite element method.*